

# Kompressionswellen in einer isothermen Atmosphäre mit vertikalem Magnetfeld

R. LÜST und M. SCHOLER

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, Institut für extraterrestrische Physik,  
Garching bei München

(Z. Naturforsch. **21 a**, 1098—1106 [1966]; eingegangen am 3. März 1966)

*Herrn Professor Dr. W. GENTNER zum 60. Geburtstag gewidmet*

The propagation of waves in the solar atmosphere is investigated with respect to the problem of the chromospheric spiculae and of the heating of the solar chromosphere and corona. In particular the influence of external magnetic fields is considered. Waves of finite amplitudes are numerically calculated by solving the time-dependent magnetohydrodynamic equation for two spatial dimensions by assuming axial symmetry. For the case without a magnetic field the comparison between one dimensional and two dimensional treatment shows the strong influence of the radial propagation on the steepening of waves in the vertical direction. In the presence of a magnetic field it is shown that the propagation is strongly guided along the lines of force. The steepening of the waves along the field is much larger as compared to the case where no field is present.

Eine große Anzahl von Autoren hat in den letzten Jahren die Feinstruktur der Chromosphäre, die Spiculen, nachgewiesen und untersucht. Neuere Beobachtungen durch CRAGG, HOWARD und ZIRIN<sup>1</sup> sowie BECKERS<sup>2</sup> mit Hilfe von Spektroheliogrammen der Sonnenscheibe zeigen, daß die Spiculen nicht gleichmäßig über die Sonnenscheibe verteilt sind, sondern sich in sogenannten Rosetten und Büscheln konzentrieren. Diese Gebiete fallen mit den hellen Ca-K-Emissionsgebieten zusammen, von welchen eine Korrelation mit Magnetfeldern von etwa 20 Gauss bekannt ist.

Für eine Kompressionswelle mit einer Frequenz, welche größer als die kritische Frequenz der Sonnenatmosphäre ist, wächst die Amplitude infolge der nach oben abnehmenden Dichte rasch an, und die Welle entwickelt sich zu einer Stoßwelle. Es war schon früher darauf hingewiesen worden (LÜST<sup>3</sup>), daß in Gebieten, in denen der magnetische Druck dem Gasdruck vergleichbar ist, Kompressionswellen sich bevorzugt entlang dem magnetischen Feld bewegen. Die durch die Granulen erzeugten Kompressionswellen könnten also durch ihre Fortpflanzung entlang einem vertikalen Magnetfeld zu der säulenartigen Struktur der Chromosphäre führen.

In der vorliegenden Arbeit wird daher die Ausbreitung von Kompressionswellen endlicher Amplitude in einer isothermen Atmosphäre untersucht.

<sup>1</sup> T. CRAGG, R. HOWARD u. H. ZIRIN, *Astrophys. J.* **138**, 303 [1963].

<sup>2</sup> J. M. BECKERS, *Astrophys. J.* **140**, 1339 [1964].

<sup>3</sup> R. LÜST, *Nuovo Cim. Suppl.* **22**, 228 [1961].

<sup>4</sup> L. BIERMANN, *Z. Astrophys.* **25**, 161 [1948].

Die Atmosphäre wird als elektrisch unendlich gut leitendes Medium angenommen und die Wellenausbreitung in ihr wird im Rahmen der magnetohydrodynamischen Näherung behandelt. Das partielle nichtlineare Differentialgleichungssystem wurde als Anfangswertproblem numerisch nach einem expliziten Differenzenverfahren integriert. Es wird gezeigt, daß Felder von 20 Gauss ausreichen, um die Welle in horizontaler Richtung scharf zu begrenzen und entlang den Magnetfeldlinien zu führen.

Die Ausbreitung von Kompressionswellen in einer Atmosphäre mit einem Dichtegradienten ist vor allem auch für die Aufheizung der Korona von Interesse (BIERMANN<sup>4</sup>, SCHWARZSCHILD<sup>5</sup>, OSTERBROCK<sup>6</sup>). Bei den bisherigen Untersuchungen wurde die endliche Horizontalausdehnung der Granulen nicht berücksichtigt und die Wellenausbreitung als eindimensionales Problem behandelt (SCHIRMER<sup>7</sup>, WHITNEY<sup>8</sup>, BIRD<sup>9</sup>). Ein Vergleich unserer zweidimensionalen mit eindimensionalen Rechnungen zeigt, daß infolge der seitlichen Energieübertragung die Laufstrecke zur Bildung einer Stoßwelle um vier homogene Schichtdicken weiter liegt. Im Gegensatz zur Annahme von BIRD schließen wir daher, daß die Wellen die Photosphäre durchdringen können und sich erst in der Chromosphäre zu Stoßwellen aufsteilen und ihre Energie dissipieren.

<sup>5</sup> M. SCHWARZSCHILD, *Astrophys. J.* **107**, 1 [1948].

<sup>6</sup> D. E. OSTERBROCK, *Astrophys. J.* **134**, 347 [1961].

<sup>7</sup> H. SCHIRMER, *Z. Astrophys.* **27**, 132 [1950].

<sup>8</sup> CH. WHITNEY, *Ann. Astrophys.* **19**, 34 [1956].

<sup>9</sup> G. A. BIRD, *Astrophys. J.* **140**, 288 [1964].



### 1. Grundgleichungen

Für die folgenden Untersuchungen wird eine ebene Atmosphäre in der magnetohydrodynamischen Näherung behandelt. Wir gehen von den folgenden Grundgleichungen aus:

Die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Die Impulserhaltungsgleichung:

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] - \operatorname{grad} p - \varrho \operatorname{grad} \Phi. \quad (2)$$

Die Energiegleichung (unter Vernachlässigung von Reibung und Wärmeleitung):

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt}. \quad (3)$$

Das OHMSche Gesetz bei unendlich großer elektrischer Leitfähigkeit:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

Die MAXWELL-Gleichungen bei Vernachlässigung des Verschiebungstromes:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5 \text{ a})$$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}, \quad (5 \text{ b})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5 \text{ c})$$

Dabei ist  $\varrho$  die Dichte,  $p$  der hydrostatische Druck,  $\mathbf{v}$  die Materiegeschwindigkeit,  $\Phi$  das Gravitationspotential,  $\mathbf{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\mathbf{B}$  die magnetische Feldstärke,  $\mathbf{j}$  die Stromdichte,  $\gamma$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen,  $t$  die Zeit.

In einer isothermen Atmosphäre mit der Dichte  $\varrho_0$ , dem Druck  $p_0$  und einem homogenen Magnetfeld  $B_0$  in vertikaler Richtung wird der Dichteverlauf gegeben durch:

$$\varrho_0 = \varrho_{00} e^{-z/H}, \quad (6)$$

wobei  $\varrho_{00}$  die Dichte für  $z = 0$  und

$$H = \frac{p_0}{\varrho_0 g} = \frac{c_s^2}{g} \quad (7)$$

die homogene Schichtdicke ist. Hierin bedeutet  $g$  die Schwerkraft und  $c_s = \sqrt{p_0/\varrho_0}$  die NEWTONSche Schallgeschwindigkeit.

Für die weiteren Rechnungen ist es zweckmäßig, dimensionslose Variable einzuführen. Folgende Größen werden eingeführt:

$$\mathbf{r}^* = \frac{c_s^2}{g} \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}^* = c_s \mathbf{v}, \quad \mathbf{B}^* = B_0 \mathbf{B}, \quad (8 \text{ a})$$

$$p^* = p_{00} p, \quad \varrho^* = \varrho_{00} \varrho, \quad \tau = \frac{c_s}{g} t. \quad (8 \text{ b})$$

Sei  $\xi$  die Verschiebung eines Teilchens aus der Gleichgewichtslage, so daß gilt

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \mathbf{v}^*. \quad (9)$$

Für adiabatische Störungen erhält man dann in linearer Näherung die Differentialgleichung [s. FERRARO und PLUMPTON<sup>10</sup>, Gl. (18)]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \operatorname{grad} (\gamma \operatorname{div} \xi - \xi_z) + \frac{M}{\varrho_0^*} [\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\xi \times \mathbf{e}_z)] \times \mathbf{e}_z + (\gamma - 1) \operatorname{div} \xi \cdot \mathbf{e}_z, \quad (10)$$

wobei  $\mathbf{e}_z$  der Einheitsvektor in  $z$ -Richtung und

$$M = \frac{1}{4\pi} \frac{B_0^2}{c_s^2 \varrho_{00}} \quad (11)$$

ist. Für die horizontale Komponente  $\xi_x$  erhält man bei Ausbreitung in Richtung der Vertikalen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} = c_A^2 \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Diese Differentialgleichung beschreibt eine ALFVÉN-sche Welle;  $c_A = \sqrt{M/\varrho_0^*}$  ist die dimensionslose ALFVÉN-Geschwindigkeit.

Für die vertikale Komponente  $\xi_z$  erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} = \gamma \left( \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} - \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right). \quad (13)$$

Diese Differentialgleichung für die vertikale Ausbreitung einer Schallwelle in einer isothermen Atmosphäre wird gelöst durch:

$$\xi_z = \xi_{z0} e^{i(\omega \tau - kz)} \quad (14)$$

mit der Dispersionsbeziehung

$$k = \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma} - \frac{\omega_0^2}{\gamma}}, \quad (15)$$

wobei  $\omega_0 = \sqrt{\gamma/2}$  die charakteristische Eigenfrequenz der Atmosphäre in der dimensionslosen Formulierung ist.

Der allgemeine Fall bei Berücksichtigung der seitlichen Ausbreitung ist von FERRARO und PLUMPTON<sup>10</sup> sowie von WEYMANN und HOWARD<sup>11</sup> untersucht worden. Für die schallähnliche Welle geht die Horizontalkomponente jedoch exponentiell mit  $z$  gegen Null, bei der ALFVÉNSchen Lösung nimmt die vertikale Komponente exponentiell ab. Dieses Ergebnis werden wir bei der Formulierung der Randbedingungen benutzen.

<sup>10</sup> V. C. A. FERRARO u. C. PLUMPTON, *Astrophys. J.* **127**, 459 [1958].

<sup>11</sup> R. WEYMANN u. R. HOWARD, *Astrophys. J.* **128**, 142 [1958].

Zur numerischen Untersuchung von Kompressionswellen endlicher Amplitude nehmen wir axiale Symmetrie an, d. h. alle Variablen sind Funktionen des dimensionslosen Abstandes  $s$  von der vertikalen Symmetriechse, der Höhe  $y$  von der Atmosphärenbasis und der Zeit  $\tau$ . Mit  $\mathfrak{B}^* = \{R, Z\}$  und  $\mathfrak{v}^* = \{w, v\}$  erhalten wir nach Elimination des elektrischen Feldes  $\mathfrak{E}$  und der Stromdichte  $\mathfrak{j}$  aus den Gln. (1) bis (5) :

$$\frac{\partial \varrho^*}{\partial \tau} = -w \frac{\partial \varrho^*}{\partial s} - v \frac{\partial \varrho^*}{\partial y} - \varrho^* \operatorname{div} \mathfrak{v}^*, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} &= -w \frac{\partial w}{\partial s} - v \frac{\partial w}{\partial y} \\ &\quad - \frac{1}{\varrho^*} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (p^* + q) - \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial s} \right) Z M \right], \end{aligned} \quad (17 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -w \frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\partial v}{\partial y} \\ &\quad - \frac{1}{\varrho^*} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (p^* + q) + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial s} \right) R M \right] - 1, \end{aligned} \quad (17 \text{ b})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = w \frac{\partial Z}{\partial y} - v \frac{\partial R}{\partial y} - R \frac{\partial v}{\partial y} + Z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (18 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \tau} &= -w \frac{\partial Z}{\partial s} - v \left( \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{w}{s} \right) \\ &\quad + R \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{s} \right) + v \frac{\partial R}{\partial s}, \end{aligned} \quad (18 \text{ b})$$

$$\frac{\partial \varrho^*}{\partial \tau} = -w \frac{\partial p^*}{\partial s} - v \frac{\partial p^*}{\partial y} - [\gamma p^* + (\gamma - 1) q] \operatorname{div} \mathfrak{v}^* \quad (19)$$

mit

$$\operatorname{div} \mathfrak{v}^* = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{s}.$$

$q$  ist ein von J. v. NEUMANN und RICHTMYER eingeführter künstlicher Viskositätsterm (s. RICHTMYER<sup>12</sup>), welcher den Übergang einer Welle endlicher Amplitude in eine Stoßwelle erlaubt:

$$q = \begin{cases} \beta (\Delta y)^2 \varrho^* \operatorname{div} \mathfrak{v}^* & \text{für } \operatorname{div} \mathfrak{v}^* \leq 0, \\ 0 & \text{für } \operatorname{div} \mathfrak{v}^* > 0. \end{cases} \quad (20)$$

$\beta$  ist eine Konstante,  $\Delta y$  die bei den numerischen Rechnungen benutzte räumliche Intervalllänge. Die Stoßfront wird hierdurch auf eine Länge  $\beta \Delta y$  auseinandergezogen.

## 2. Anfangs- und Randbedingungen

Zur Erzeugung einer Kompressionswelle wurde bei  $\tau = 0$  zur ungestörten Dichte- und Druckverteilung  $\varrho_0^* = p_0^* = e^{-y}$  eine von der Achse und dem Boden

radial nach außen mit einer GAUSS-Verteilung abnehmende Dichte- und Druckerhöhung zuaddiert. Ist  $r^2 = s^2 + y^2$ , so wurde von den Anfangsbedingungen

$$p^* = \varrho^* = e^{-y} + A e^{-\alpha r^2}, \quad (21 \text{ a})$$

$$v = 0, \quad w = 0, \quad (21 \text{ b})$$

$$R = 0, \quad Z = 1 \quad (21 \text{ c})$$

ausgegangen. Die Stärke des Magnetfeldes wird durch die Größe  $M$  aus (9) gegeben. Setzt man  $M = 2 e^{-h}$ , so ist  $h$  die Höhe, in welcher der magnetische Druck gleich dem hydrostatischen Druck im ungestörten Zustand ist.

Als Randbedingung an der Atmosphärenbasis wurde eine feste Wand angenommen:

$$v = 0, \quad R = 0. \quad (22)$$

Die Randbedingungen auf der Achse ergeben sich aus den Symmetrie- bzw. Stetigkeitsforderungen:

$$w = 0, \quad R = 0, \quad (23 \text{ a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{\partial \varrho^*}{\partial s} = \frac{\partial p^*}{\partial s} = 0. \quad (23 \text{ b})$$

Eine isotherme Atmosphäre erstreckt sich nach oben theoretisch bis ins Unendliche, bei numerischen Rechnungen muß sie jedoch irgendwo willkürlich abgeschnitten werden. Die am oberen Rand zu stellenden Randbedingungen sollten die physikalischen Eigenschaften des vernachlässigten Teiles der Atmosphäre ausdrücken. Bei den Lösungen für Wellen kleiner Amplitude zeigt sich, daß für Höhen, in denen die ALFVÉN-Geschwindigkeit wesentlich größer als die Schallgeschwindigkeit ist, die beiden Wellenarten im wesentlichen entkoppelt sind. Es wurden daher für die horizontale und vertikale Geschwindigkeitskomponente zwei verschiedene Randbedingungen gewählt, welche das Auslaufen, jedoch nicht das Einlaufen von Schallwellen bzw. ALFVÉN-Wellen gestatten. Diese Methode wurde von LAUTMAN<sup>13</sup> für den eindimensionalen hydrodynamischen Fall von Kompressionswellen angegeben und benutzt. Bildet man von der Lösung (14) die erste und zweite Zeitableitung und die gemischte Zeit- und Ortsableitung, so erhält man:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma} - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\omega} \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (24)$$

Berücksichtigt man nur das Minuszeichen, d. h. schließt die nach unten laufenden Wellen aus und be-

<sup>12</sup> R. D. RICHTMYER, Difference Methods for Initial-Value Problems. 2. Aufl., Interscience Publishers, New York 1962.

<sup>13</sup> D. A. LAUTMAN, Astrophys. J. **126**, 537 [1957].

schränkt sich auf Frequenzen, welche wesentlich größer als die Eigenfrequenz  $\omega_0$  sind, so erhält man:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = V\gamma \left( \frac{v}{2} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (25)$$

Analog liefert die Lösung der Gl. (11) eine Randbedingung für die radiale Geschwindigkeitskomponente  $w$ . Unter der Annahme  $c_A = \text{const}$  erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -c_A \frac{\partial w}{\partial s}. \quad (26)$$

Für die seitliche Begrenzung liefert die auslaufende Wellenlösung für große  $s$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = - (c_A + V\gamma) \frac{\partial w}{\partial s}. \quad (27)$$

### 3. Numerisches Verfahren

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems (16) – (19) wird der  $s$ - $y$ - $\tau$ -Raum in ein dreidimensionales Gitter mit konstanten Gitterabständen  $\Delta s$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta \tau$  aufgeteilt. Die kontinuierlichen Variablen werden durch die diskreten Variablen

$$s = j \Delta s \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (28 \text{ a})$$

$$y = k \Delta y \quad (k = 0, 1, 2, \dots, M), \quad (28 \text{ b})$$

$$\tau = T \Delta \tau \quad (T = 0, 1, 2, \dots) \quad (28 \text{ c})$$

ersetzt. Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$A(j \Delta s, k \Delta y, \tau) = A_{j,k}, \quad (29 \text{ a})$$

$$A(j \Delta s, k \Delta y, \tau + \frac{1}{2} \Delta \tau) = \tilde{A}_{j,k}, \quad (29 \text{ b})$$

$$A(j \Delta s, k \Delta y, \tau + \Delta \tau) = \tilde{\tilde{A}}_{j,k}. \quad (29 \text{ c})$$

Die Zeitableitungen werden ersetzt durch

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} \rightarrow \frac{\hat{A}_{j,k} - A_{j,k}}{\Delta \tau}, \quad (30)$$

Ortsableitungen durch:

$$\frac{\partial A}{\partial s} \rightarrow \frac{A_{j+1,k} - A_{j-1,k}}{2 \Delta s}. \quad (31)$$

Konvektionsterme der Art  $v \frac{\partial A}{\partial y}$  müssen aus Stabilitätsgründen gesondert behandelt werden. Hier wurde eine von LELEVIER angegebene Methode benutzt (s. RICHTMYER<sup>12</sup>):

$$v \frac{\partial A}{\partial y} \rightarrow \frac{v_{j,k}}{\Delta y} \begin{cases} A_{j,k} - A_{j,k-1} & \text{für } v_{j,k} \geq 0, \\ A_{j,k+1} - A_{j,k} & \text{für } v_{j,k} < 0. \end{cases} \quad (32)$$

Da das entstehende Differenzensystem gekoppelt ist, läßt es sich nicht in irgendeiner Weise auflösen. Es wurde daher folgendermaßen vorgegangen: Zunächst

werden mit Hilfe der zur Zeit  $\tau$  bekannten Werte für  $v$ ,  $w$ ,  $\varrho^*$ ,  $p^*$ ,  $R$ ,  $Z$  die Geschwindigkeiten  $v$ ,  $w$  zum Zeitpunkt  $\tau + \Delta \tau/2$  bestimmt. Mit den Werten für  $v$ ,  $w$ ,  $\varrho^*$ ,  $p^*$ ,  $R$ ,  $Z$  werden die Werte  $\hat{\varrho}^*$ ,  $\hat{p}^*$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{Z}$  bestimmt.

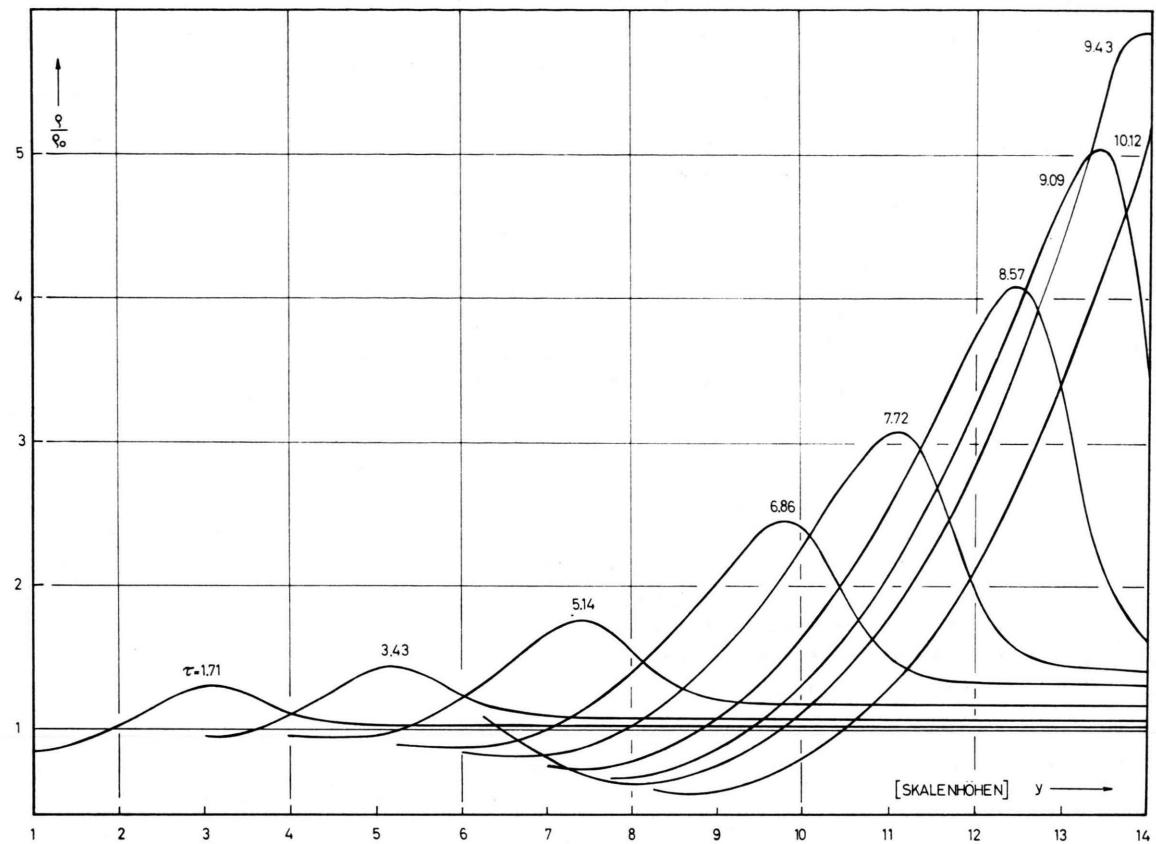
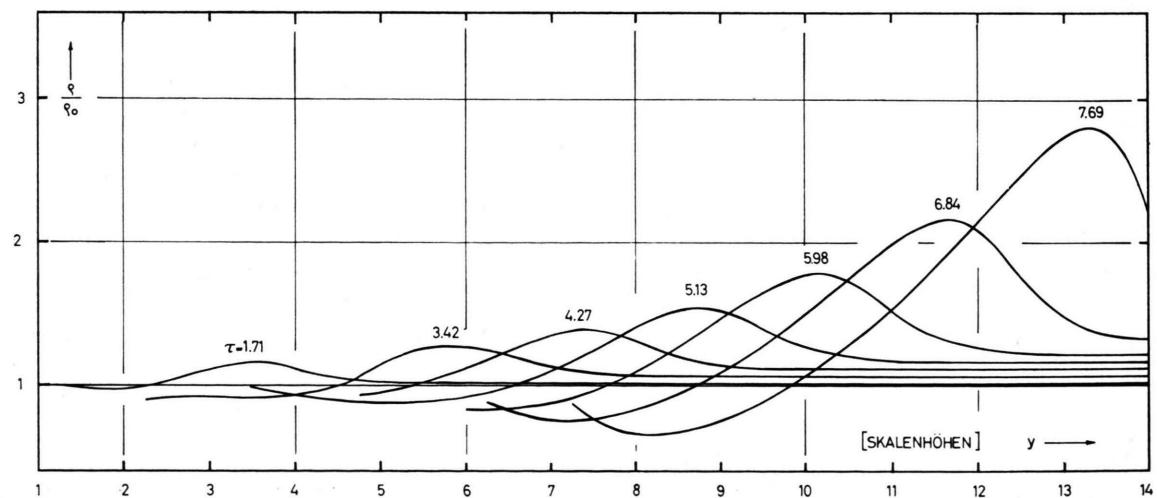
Bei der Approximation einer Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ist es möglich, daß die Differenzengleichung nicht stabil ist. Es läßt sich zeigen, daß für das vorliegende Differenzensystem eine zur Stabilität notwendige Bedingung ist, daß eine kleine Störung während einem Zeitschritt  $\Delta \tau$  sich nicht über zwei Gitterabstände fortpflanzen darf:

$$\Delta \tau \leq \frac{2 \cdot \min(\Delta s, \Delta y)}{\sqrt{v^2 + w^2} + \sqrt{c_A^2 + c_A^2}}. \quad (33)$$

Das Programm für die numerischen Rechnungen wurde in Fortran II aufgestellt und die Rechnungen wurden auf der IBM-7090-Rechenmaschine des Instituts für Plasmaphysik, Garching bei München, durchgeführt.

### 4. Ergebnisse

Berücksichtigt man nur die Gln. (16), (17) und (18) und setzt  $M = 0$ , so erhält man den rein hydrodynamischen Fall. Für die isotherme Ausbreitung bei einer Anfangsstörung  $A = 1$ ,  $\alpha = 1$  ist das Verdichtungsverhältnis  $\varrho/\varrho_0$  auf der Achse als Funktion der Höhe zu verschiedenen Zeiten  $\tau$  in Abb. 1 dargestellt. Abb. 2 zeigt die entsprechende Wellenausbreitung bei adiabatischer Kompression. Das qualitative Verhalten der Wellenamplitude entspricht dem von anderen Autoren angegebenen: Im isothermen Fall findet man bis sieben Skalenhöhen eine langsame und dann rasch stärker werdende Verdichtung. Während jedoch SCHIRMER<sup>7</sup>, von einer Verdichtung von 1,4 ausgehend, nach 3,5 Skalenhöhen Verdichtungen von über sechs erhält, steigt bei unseren Ergebnissen innerhalb von sieben Skalenhöhen von  $y = 6$  bis  $y = 13$  das Verdichtungsverhältnis nur von 1,5 auf 5,0. Dies ist auf die Energieübertragung in die seitliche, d. h. radiale Richtung zurückzuführen. Abb. 3 zeigt, daß sich schon in geringer Höhe eine Wellenfront von fast konstanter Stärke in radialer Richtung über den berechneten Bereich von fünf Skalenhöhen ausbildet. Hier ist das Verdichtungsverhältnis auf der Achse und auf Schnitten parallel dazu im Abstand  $s = 2, 3$  und  $4$  zur Zeit  $\tau = 3,86$  aufgetragen. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen war hierbei, wie auch in den folgenden Fällen, 5/3.

Abb. 1. Der Verdichtungsgrad der Welle auf der Achse zu verschiedenen Zeiten  $\tau$  bei isothermer Ausbreitung.Abb. 2. Der Verdichtungsgrad der Welle auf der Achse zu verschiedenen Zeiten  $\tau$  bei adiabatischer Ausbreitung ( $\gamma = 5/3$ ).

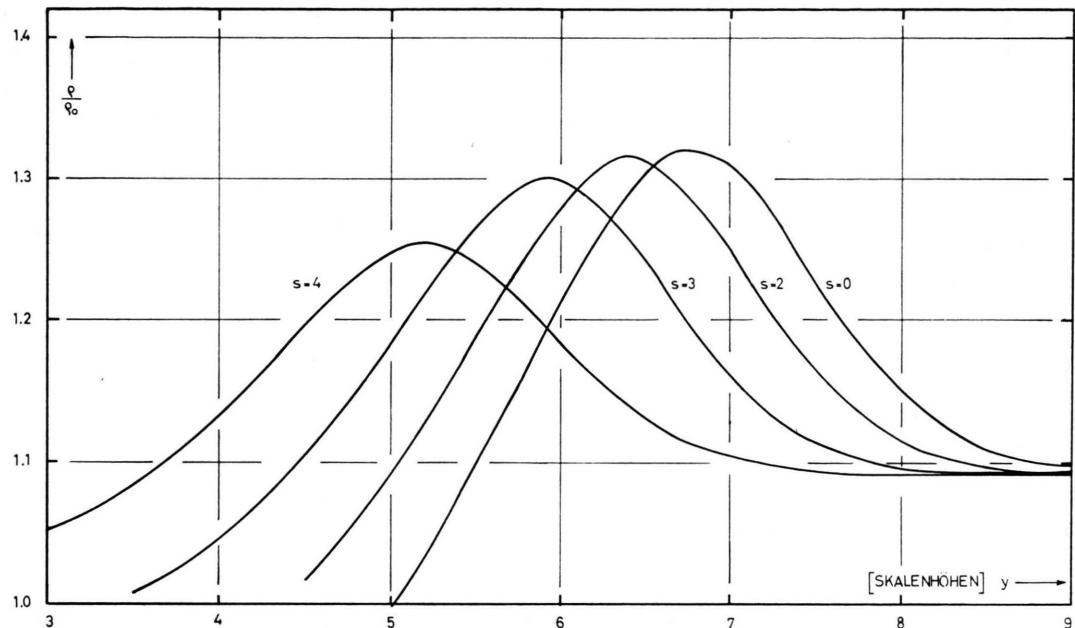


Abb. 3. Der Verdichtungsgrad zur Zeit  $\tau=3,86$  in verschiedenen Abständen  $s$  von der Achse als Funktion der Höhe.

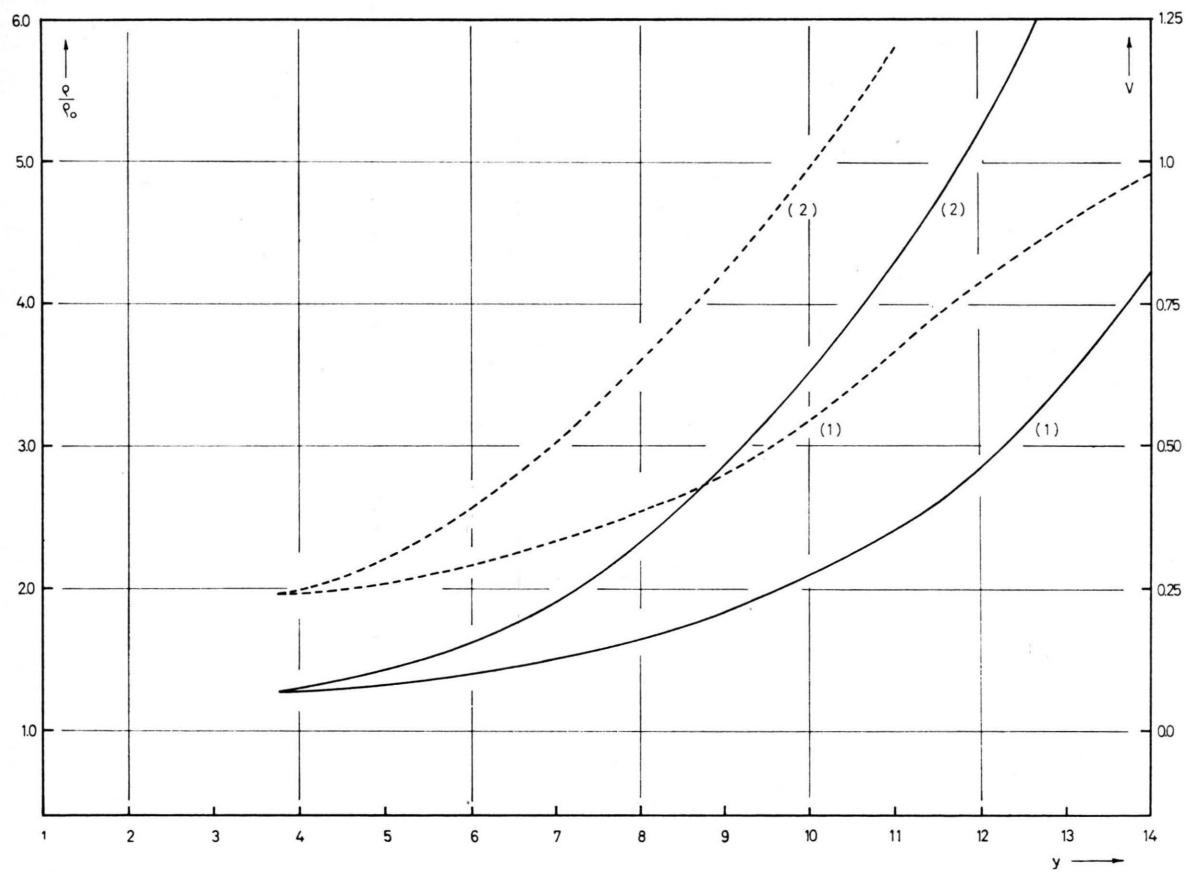


Abb. 4. Vergleich zwischen eindimensionaler (1) und zweidimensionaler (2) Behandlung der Wellenausbreitung für den Verdichtungsgrad (—) und die Vertikalgeschwindigkeit (---).

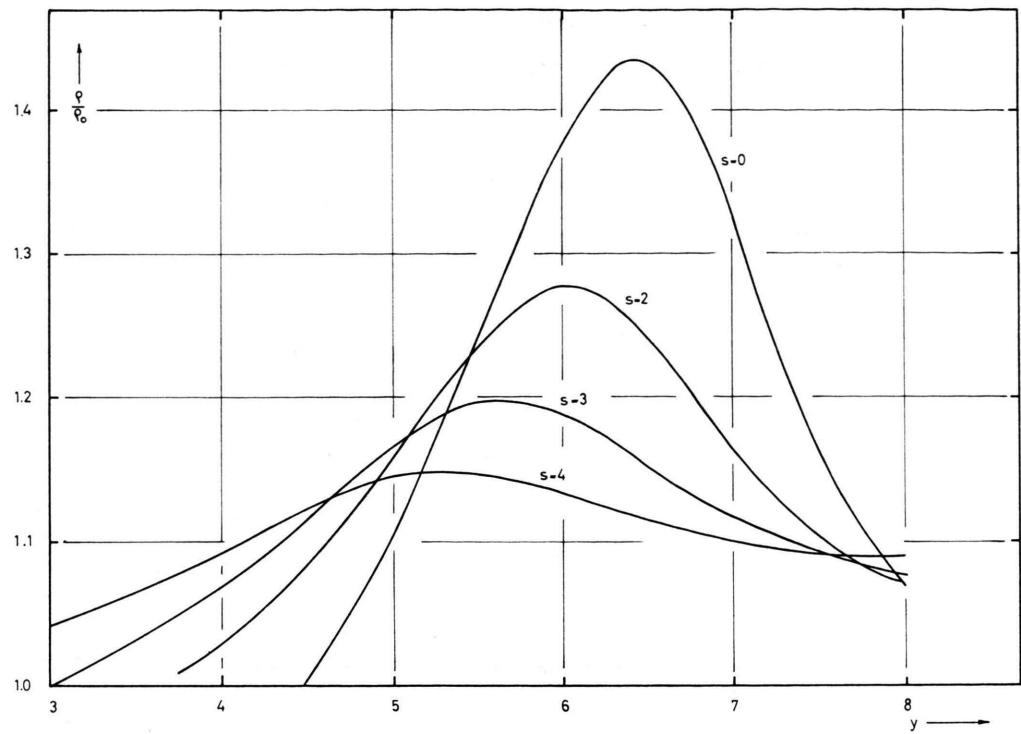


Abb. 5. Der Verdichtungsgrad zur Zeit  $\tau=3,81$  in verschiedenen Abständen  $s$  von der Achse als Funktion der Höhe bei einer durch  $h=4$  gegebenen Magnetfeldstärke.

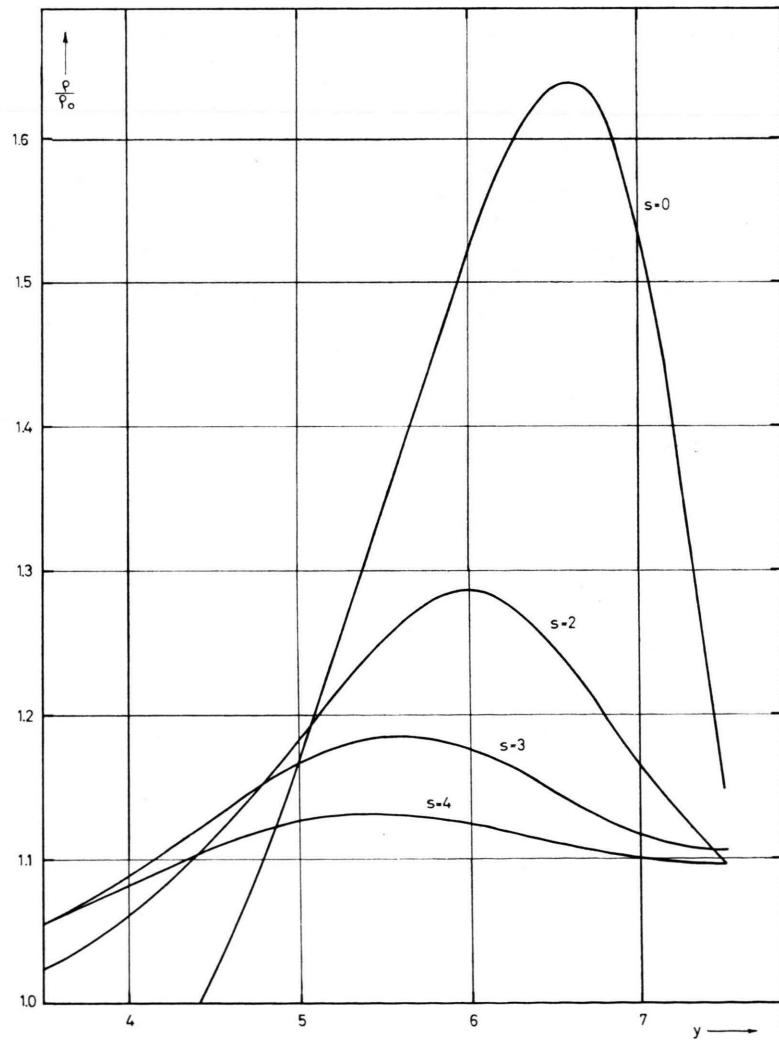


Abb. 6. Entsprechend wie Abb. 5 bei einer durch  $h=3$  gegebenen Magnetfeldstärke.

Abb. 4 zeigt einen Vergleich zwischen eindimensionaler und zweidimensionaler Rechnung. Um zu vergleichbaren Resultaten zu gelangen, wurde mit gleichen Anfangsbedingungen begonnen und ab  $\tau = 1,7$  getrennt ein- bzw. zweidimensional weitergerechnet. Zu diesem Zeitpunkt hat sich die Wellenfront in radialer Richtung über zwei Skalenhöhen zu fast gleich starker Amplitude ausgebildet. In Abb. 4 ist sowohl die Amplitude des Dichteverhältnisses als auch der Vertikalgeschwindigkeit  $v$  auf der Achse als Funktion der Höhe aufgetragen. Die Anfangsstörung ist mit  $A = 2$  gleich dem doppelten der ungestörten Dichte- und Druckverteilung. Zum Zeitpunkt  $\tau = 1,7$  ist  $v \approx 0,2$ , und da  $c_{\text{Sch}} = 1,29^*$ , ist dies etwa 1/6 der Schallgeschwindigkeit und entspricht nach BIRD der Geschwindigkeitsamplitude in den konvektiven Schichten. Nach Abb. 4 tritt gegenüber dem eindimensionalen Fall die entsprechende Verdichtung um 3 bis 4 homogene Schichtdicken später ein; hieraus ist erkenntlich, daß bei der Frage, ob die Schallwellen die Photosphäre durchdringen können oder nicht, die zweidimensionale Behandlung, also die

endliche Horizontalausdehnung der Granulen, wesentlich ist.

Bei Überlagerung eines homogenen Magnetfeldes in vertikaler Richtung ergibt sich eine scharfe seitliche Begrenzung der Wellenfront. Sei  $h$  die Höhe, in welcher der ungestörte hydrostatische Druck gleich dem Druck des Magnetfeldes ist. In den Abb. 5 und 6 ist für  $h = 4$  und  $h = 3$  das Verhältnis  $\varrho/\varrho_0$  als Funktion der Höhe für verschiedene Abstände  $s$  von der Achse aufgetragen. Der Zeitpunkt  $\tau = 3,81$  entspricht dem Zeitpunkt in Abb. 3. Ein Vergleich der Abb. 3, 5 und 6 zeigt die beiden Effekte des Magnetfeldes: Der Verdichtungsgrad in der Welle wird auf der Achse wesentlich vergrößert, in radialer Richtung fallen die Amplituden rasch ab, während im Fall ohne Magnetfeld die Amplitude über 4 homogene Schichtdicken nahezu konstant ist. In Abb. 7 ist der Amplitudenverlauf von  $\varrho/\varrho_0$  auf der Achse als Funktion der Zeit dargestellt. Entsprechend verhält sich die Geschwindigkeitsamplitude auf der Achse. Das Magnetfeld drückt das Plasma zur Achse und quetscht es gleichsam nach oben.

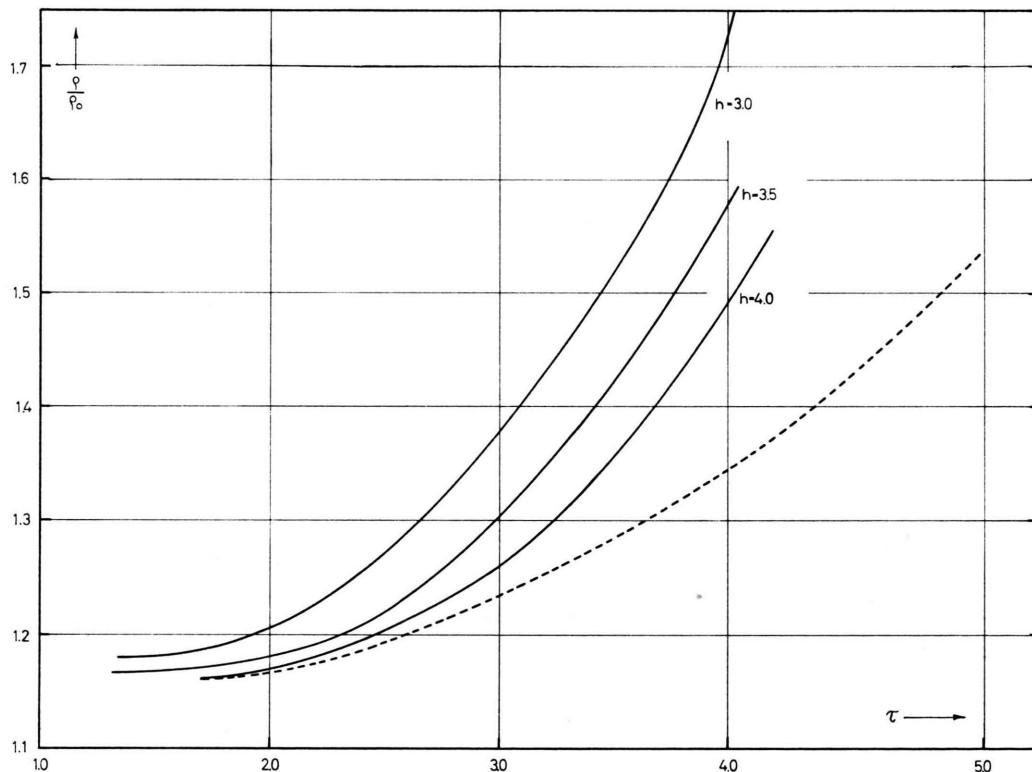


Abb. 7. Die Amplitude der Vertikalgeschwindigkeit auf der Achse für drei Magnetfeldstärken und den feldfreien Fall (—) als Funktion der Höhe.

\*  $c_{\text{Sch}} = \sqrt{\gamma} = 1,29$  = Schallgeschwindigkeit.

Die Durchmesser der Granulationselemente der Sonne sind von der Größenordnung 500 km, und damit ist der Radius etwa gleich dem Doppelten der homogenen Schichtdicke der oberen Photosphäre. Bei 800 km Höhe in der Sonnenatmosphäre ist die Schallgeschwindigkeit gleich der ALFVÉN-Geschwindigkeit eines Feldes von 20 Gauss und damit der hydrostatische Druck in dieser Höhe gleich dem magnetischen Druck. Der Höhe von 800 km entsprechen ungefähr 4 homogene Schichtdicken und damit dem in unseren Rechnungen mit  $h=4$  bezeichneten Fall. Bei unseren Rechnungen ergab sich, daß mit einer Anfangsstörung  $A=1$  nach dem Ausbilden einer Welle die Wellenfront in radialer Richtung über zwei homogene Schichtdicken gleiche Stärke besaß. Identifizieren wir die Ausdehnung der Granulationselemente mit der Größe der schall-emittierenden Fläche, so zeigen unsere Ergebnisse, daß infolge der scharfen Bündelung durch das Magnetfeld der Radius der Wellenfront nicht wesentlich über zwei homogene Schichtdicken anwächst. Damit entspricht der Radius der Wellenfront dem

Radius eines Granulums. Es genügen also Feldstärken von 20 Gauss, um die säulenartige Struktur der solaren Spiculen, die wir mit dem von der Stoßwelle durchlaufenen Plasma identifizieren, zu erklären (s. auch PARKER<sup>14</sup>). Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, scheint auf Grund der Beobachtungen von BECKERS die Annahme solcher Feldstärken vernünftig und tatsächlich mit der Anwesenheit von Spiculen korreliert zu sein.

Diese Arbeit wurde von R. L. 1955 während eines Aufenthaltes als Fulbright-Stipendiat am Princeton University Observatory in Angriff genommen. Die ersten numerischen Rechnungen wurden damals auf der elektronischen Rechenmaschine des Institute for Advanced Studies begonnen. Eine entsprechend leistungsfähige Rechenmaschine existierte in Deutschland noch nicht, so daß die Rechnungen hier zunächst nicht fortgeführt werden konnten.

Erste Rechnungen zu diesem Problem wurden in Princeton unter der Annahme unendlich kleiner Amplitude von D. LAUTMAN, A. SCHLÜTER und M. SCHWARZSCHILD durchgeführt. M. SCHWARZSCHILD sei für die Anregung zu dieser Arbeit und für hilfreiche Diskussionen vielmals gedankt.

<sup>14</sup> E. N. PARKER, *Astrophys. J.* **140**, 1170 [1964].